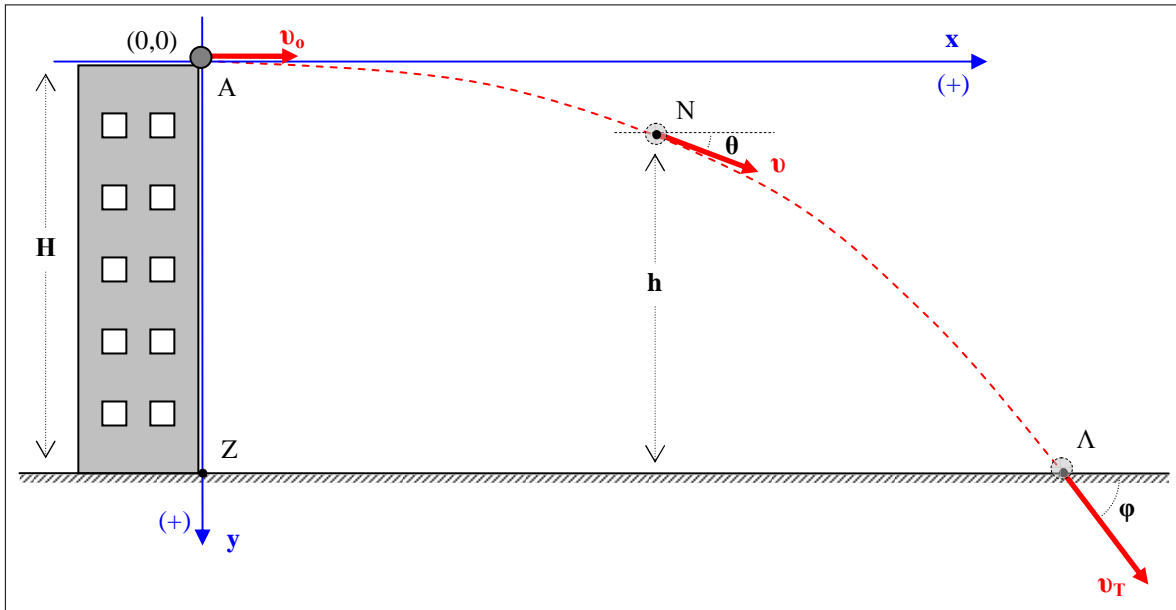


**Άσκηση στην οριζόντια βολή**



Μεταλλική σφαίρα μάζας  $m = 0,4\text{kg}$  εκτοξεύεται οριζόντια από την άκρη A της ταράτσας κτιρίου ύψους  $H = 20\text{m}$ , με ταχύτητα μέτρου  $v_0 = 20\text{m/s}$  και πέφτει στο έδαφος στο σημείο Λ.

1. Ο συνολικός χρόνος κίνησης της σφαίρας είναι:

1s  2s  4s

2. Στο σύστημα αξόνων του πιο πάνω σχήματος, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Z και Λ.

3. Να βρεθεί το μέτρο της τελικής ταχύτητας  $\vec{v}_T$  και η γωνία που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο.

4. Κάποια στιγμή η σφαίρα περνάει από το σημείο N που απέχει οριζόντια απόσταση 20m από το σημείο βολής. Οι συντεταγμένες του σημείου N (στο S.I.) είναι:

(20, 5)  (20, 10)  (20, 15)

5. Το σημείο N απέχει από το έδαφος:

5m  10m  15m

6. Η εφαπτομένη της γωνίας  $\theta$  στο σημείο N είναι:

$\frac{\sqrt{3}}{3}$    $\frac{1}{2}$    $\sqrt{3}$

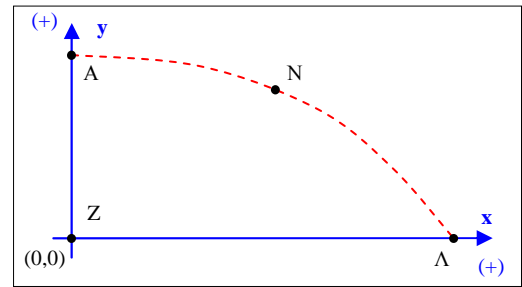
7. Το μέτρο της επιτάχυνσης της σφαίρας στο ίδιο σημείο είναι:

$g$    $g \cdot \eta\mu\theta$    $g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

8. \* Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητας στο σημείο N;

9. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της τροχιάς της σφαίρας στο σύστημα αξόνων του αρχικού σχήματος.

10. Θεωρώντας τώρα ως νέο σύστημα αξόνων αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, να βρείτε τις νέες συντεταγμένες των σημείων A, Λ, N και να τροποποιήσετε κατάλληλα την εξίσωση τροχιάς της σφαίρας.



11. Το μήκος της τροχιάς της σφαίρας είναι:

40m  44m  46m

12. Αν η μηχανική ενέργεια της σφαίρας είναι  $E = 80\text{J}$ , τότε η δυναμική της ενέργεια στο σημείο N είναι:

60J  80J  -20J

(Δίνεται  $g = 10\text{m/s}^2$ . Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.)

\* Για το ερώτημα 8 απαιτείται γνώση της κεντρομόλου επιτάχυνσης.

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:**

1. Θα προσδιορίσουμε πρώτα τις εξισώσεις κίνησης της σφαίρας κατά άξονα.

Θεωρώντας ως αρχή μέτρησης του χρόνου ( $t=0$ ) τη στιγμή εκτόξευσης της σφαίρας, προκύπτουν από τις τιμές του διπλανού πίνακα για την ταχύτητα και τη θέση της σε κάθε άξονα οι εξής εξισώσεις:

Άξονας x	Άξονας y
$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = B = m \cdot g$
$a_x = 0$	$a_y = g = 10\text{m/s}^2$
$v_{0x} = v_0 = 20\text{m/s}$	$v_{0y} = 0$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$

Άξονας x	Άξονας y
$v_x = v_0 = \text{σταθ.}$ (1)	$v_y = g \cdot t$ (3)
$x = v_0 \cdot t$ (2)	$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ (4)

Θέτοντας  $y = H = 20\text{m}$  στην (4) παίρνουμε:

$$t_{0\Lambda} = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} = 2\text{s}$$

2. Για να βρούμε την απόσταση  $S$  του σημείου  $\Lambda$  από το σημείο βολής, θέτουμε στη (2)  $t = t_{0\Lambda} = 2\text{s}$ :

$$S = v_0 \cdot t_{0\Lambda} \rightarrow S = 40\text{m}$$

Έτσι, οι ζητούμενες συντεταγμένες (στο S.I.) είναι:

$$Z(0, 20) \text{ και } \Lambda(40, 20)$$

3. Από τις (1) και (3) για  $t = 2\text{s}$  έχουμε:

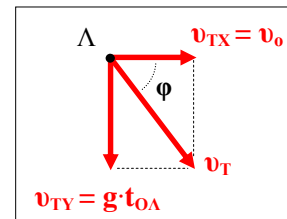
$$v_{TX} = v_0 = 20\text{m/s} \text{ και } v_{TY} = 20\text{m/s}$$

Οπότε:

$$v_T = \sqrt{v_{TX}^2 + v_{TY}^2} = 40\text{m/s}$$

και:

$$\epsilon\phi\phi = \frac{v_{TY}}{v_{TX}} = 1 \rightarrow \phi = 45^\circ$$



4. Έστω  $(x_N, y_N)$  οι συντεταγμένες του N. Τότε προφανώς  $x_N = 20\text{m}$ .

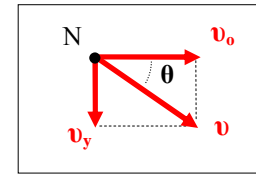
Από (2) βρίσκουμε  $t = x_N / v_0 = 1\text{s}$  και από (4)  $\rightarrow y_N = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 5\text{m}$

Για το σημείο N ισχύει λοιπόν:  $(x_N, y_N) = (20\text{m}, 5\text{m})$

5. Προφανώς ισχύει:  $h = H - y_N = 15\text{m}$

6. Αντικαθιστώντας στην (3) τον χρόνο  $t = 1s$  της ερώτησης 4 βρίσκουμε  $v_y = g \cdot t = 10m/s$  οπότε:

$$\epsilon\varphi\theta = \frac{v_y}{v_0} = \frac{1}{2}$$



7. Η σφαίρα κινείται με την επίδραση και μόνο του βάρους, οπότε η επιτάχυνσή της συμπίπτει με την επιτάχυνση  $\bar{g}$  της βαρύτητας:

$$\bar{a} = \frac{\Sigma \bar{F}}{m} = \frac{\bar{B}}{m} = \frac{m \cdot \bar{g}}{m} = \bar{g}$$

Και τελικά:  $a = g = 10m/s^2$

8. Όπως είδαμε στην προηγούμενη ερώτηση, η σφαίρα κινείται με επιτάχυνση  $\bar{a} = \bar{g}$ .

Η επιτάχυνση αυτή μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες:

(i) την επιτροχια επιτάχυνση  $\bar{a}_E$  συγγραμμική με την ταχύτητα και

(ii) την κεντρομόλο επιτάχυνση  $\bar{a}_K$  κάθετη προς αυτήν.

Από αυτές, η πρώτη σχετίζεται με τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας, ενώ η δεύτερη με τη μεταβολή της διεύθυνσης.

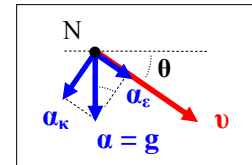
Έτσι, ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας είναι:

$$\frac{dv}{dt} = a_E = a \cdot \eta\mu\theta = g \cdot \eta\mu\theta$$

Από την ερώτηση 6 βρίσκουμε:  $\eta\mu\theta = \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{v_0^2 + v_y^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,45$

και τελικά:

$$\frac{dv}{dt} = g \cdot \eta\mu\theta \approx 4,5m/s^2$$



9. Απαλείφοντας το χρόνο  $t$  ανάμεσα στις (2) και (4) έχουμε:

(2)  $\rightarrow t = x/v_0$  και

(4)  $\rightarrow y = 1/2 \cdot g \cdot (x/v_0)^2 \rightarrow y = \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2$  ή  $y = 0,0125 \cdot x^2$

10. Οι νέες συντεταγμένες είναι  $A(0, H)$ ,  $\Lambda(S, 0)$ ,  $N(x_N, h)$  ή με αντικατάσταση:

$$\boxed{A(0, 20), \Lambda(40, 0), N(20, 15)} \quad (\text{στο S.I.})$$

Η εξίσωση (4) μετασχηματίζεται στην  $y' = H - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$  και η εξίσωση τροχιάς γίνεται:

$$\boxed{y' = H - \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2} \quad \text{ή} \quad \boxed{y = 20 - 0,0125 \cdot x^2}$$

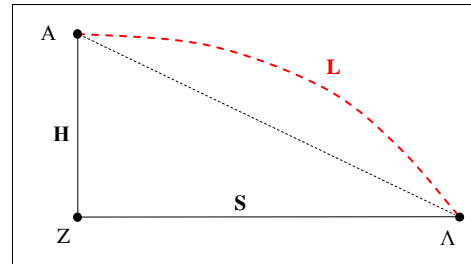
11. Ο υπολογισμός του μήκους  $L$  της τροχιάς υπερβαίνει το επίπεδο γνώσεων της Β' Λυκείου. Μπορούμε όμως να σκεφτούμε ως εξής:

Το ευθύγραμμο τμήμα  $A\Lambda$  έχει μήκος:

$$(A\Lambda) = \sqrt{H^2 + S^2} \approx 44,7\text{m}$$

Η τροχιά είναι καμπύλη και θα ισχύει:  $L > (A\Lambda)$

Από τις τιμές που δίνονται, η μόνη αποδεκτή είναι η τιμή:  $\boxed{L = 46\text{m}}$



12. Η αρχική κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι  $K_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = 80\text{J}$

Λόγω διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, για οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς της σφαίρας ισχύει  $K + U = E$ . Οπότε:

$$K_1 + U_1 = E \rightarrow U_1 = E - K_1 = 80\text{J} - 80\text{J} = 0$$

Μ' άλλα λόγια, το σημείο βολής A έχει επιλεγεί ως σημείο αναφοράς για τη δυναμική ενέργεια. Η ζητούμενη δυναμική ενέργεια στο σημείο N είναι επομένως αρνητική:

$$\boxed{U_2 = -m \cdot g \cdot y_N = -20\text{J}}$$

Επαλήθευση:

Η ταχύτητα της σφαίρας στο N είναι  $v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = 10\sqrt{5}\text{m/s}$  και η κινητική της ενέργεια  $K_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 100\text{J}$

Οπότε:  $E = K_2 + U_2 = 100\text{J} - 20\text{J} = 80\text{J}$

**Υλικό Φυσικής - Χημείας.**

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

*Διονύσης Μητρόπουλος*